

Solution exercice 1_1

- Volume apparent : 90 cm³ ; Masse de sol humide : 123 g
 Masse de sol sec (fraction minérale et organique) : $M_s = 87$ g
 Masse de sol séché à 600°C : 47 g ; à cette température, la fraction organique a été brûlée.
 Masse d'eau M_w : 36 g
 Masse de la fraction organique M_{org} : $207 \text{ g} - 167 \text{ g} = 40 \text{ g}$
 Masse de la fraction minérale M_{min} : 47 g
- masse volumique humide ρ_h : $123/90 = 1.367 \text{ g/cm}^3$
 - masse volumique sèche ρ_d : $87/90 = 0.967 \text{ g/cm}^3$
 - fraction volumique de la phase liquide ε_l : $36/90 = 0.4$ (assumes that water density is 1 g/cm³)
 - fraction volumique minérale ε_{min} : $V_{min} = \frac{M_{min}}{\rho_{min}} = \frac{47}{2.65} = 17.73 \text{ cm}^3$; $\varepsilon_{min} = \frac{V_{min}}{V_t} = \frac{17.73}{90} = 0.197$
 - fraction volumique organique ε_{org} : If the density of the organic matter is 1.4 g/cm³, $(40/1.4)/90 = 0.317$
 - fraction volumique solide ε_s : $\varepsilon_s = \varepsilon_{min} + \varepsilon_{org}$ $0.197 + 0.317 = 0.515$
 - porosité totale n : $n = 1 - \frac{V_s}{V_t} = 1 - \varepsilon_s$ $1 - 0.515 = 0.485$
 - fraction volumique gazeuse $\varepsilon_g = n - \varepsilon_l$ $0.485 - 0.4 = 0.085$
 - masse volumique réelle de la fraction solide ρ_s : $\rho_s = \frac{M_s}{V_s}$, or : $V_s = \varepsilon_s V_t$ soit :
 $\rho_s = \frac{M_s}{\varepsilon_s V_t} = 1.88 \text{ g/cm}^3$

Solution exercice 1_2

Masse volumique apparente sèche : $\rho_d = \frac{M_s}{V} = 1.72 \text{ g/cm}^3$

Masse volumique apparente humide : $\rho_h = \frac{M_h}{V} = 1.96 \text{ g/cm}^3$

$$\rho_h - \rho_d = \frac{M_h}{V} - \frac{M_s}{V} = \frac{M_h - M_s}{V} = \frac{M_w}{V} = \frac{\rho_w V_w}{V} = \rho_w \theta = 1.96 - 1.72 = 0.24 \text{ g/cm}^3$$

If $\rho_w = 1 \text{ g/cm}^3$ then

→ teneur en eau volumique θ : $\theta = 0.24 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$

Teneur en eau à saturation θ_s voisine de la porosité totale n : $n = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} = 1 - \frac{1.72}{2.65} = 0.35 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$

en admettant que la masse volumique réelle ρ_s vaut 2.65 g/cm^3 .

→ pluie nette P_n : $P_n = (0.35 - 0.24) 25 = 2.75 \text{ cm}$ ou 27.5 mm

Profondeur atteinte par une pluie de 45 mm : $45 = (0.35 - 0.24) x$, soit : $x = 409 \text{ mm}$ ou 41 cm

- Hypothèses :
- $\rho_w = 1 \text{ g/cm}^3$ (masse volumique de l'eau)
 - $\rho_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$ (masse volumique de la fraction solide du sol)
 - $\theta_s = n$ (porosité totale)
 - front d'infiltration horizontal

Solution exercice 1_3

a) Surface spécifique : $S_{sp} = \frac{\text{surface}}{\text{masse}} = \frac{A}{M_s}$

i) particule sphérique : $S_{sp} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_s} = \frac{3}{\rho_s \cdot r} = \frac{6}{\rho_s \cdot d}$

ii) particule cubique : $S_{sp} = \frac{6 \cdot a^2}{\rho_s \cdot a^3} = \frac{6}{\rho_s \cdot a}$

iii) parallél. carrée : $S_{sp} = \frac{2 \cdot l^2 + 4 \cdot l \cdot L}{\rho_s \cdot l^2 \cdot L} = \frac{2}{\rho_s \cdot L} + \frac{4}{\rho_s \cdot l} \cong \frac{4}{\rho_s \cdot l}$ si $l \ll L$

- application numérique :

- i) $S_{sp} = 0.00226 \text{ m}^2/\text{g}$
- ii) $S_{sp} = 0.0133 \text{ m}^2/\text{g}$
- iii) $S_{sp} = 1509 \text{ m}^2/\text{g}$ ($2/\rho_s L = 0.00075 \text{ m}^2/\text{g}$)

b) $S_{sp} = \frac{A_{tot}}{M_{s_{tot}}} = \frac{\sum_i A_i}{M_{s_{tot}}}$ avec i = nombre de particules

or $S_{sp_i} = \frac{A_i}{M_{s_i}}$ surface spécifique d'une particule $\rightarrow S_{sp} = \frac{\sum_i S_{sp_i} \cdot M_{s_i}}{M_{s_{tot}}}$

Toutes les particules de même forme ont la S_{sp} et la même masse $\rightarrow$ regroupement des termes pour chaque type de particules

$$S_{sp} = \frac{\sum_i S_{sp_i} \cdot M_{s_i}}{M_{s_{tot}}} = \frac{\sum_j S_{sp_j} (\sum_{ij} M_{s_{ij}})}{M_{s_{tot}}} = \sum_j S_{sp_j} \left(\frac{\sum_{ij} M_{s_{ij}}}{M_{s_{tot}}} \right) \rightarrow \boxed{S_{sp} = \sum_j S_{sp_j} \cdot X_j}$$

i : nombre de types de particules

j : indice des particules appartenant au type j

avec $X_j = \frac{\sum_{ij} M_{s_{ij}}}{M_{s_{tot}}} = \text{pourcentage massique de la classe j}$

$\rightarrow S_{sp} = 0.18 \cdot \frac{6}{\rho_s \cdot 10^{-3}} + 0.27 \cdot \frac{6}{\rho_s \cdot 10^{-4}} + 0.35 \cdot \frac{6}{\rho_s \cdot 2 \cdot 10^{-5}} + 0.12 \cdot \frac{4}{\rho_s \cdot 4 \cdot 10^{-8}} + 0.08 \cdot \frac{4}{\rho_s \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 28.73 \text{ m}^2/\text{g}$ Part des argiles : **99.8%**

Solution exercice 1_4

Note that $w = M_w/M_s = \rho_w V_w / \rho_d V_T = \theta \rho_w / \rho_d$, so $\theta = w \rho_d / \rho_w$

Profondeur (cm)	w (g/g)	ρ_d (g/cm ³)	θ (m ³ /m ³)
0-5	0.05	1.2	0.06
5-20	0.10	1.3	0.13
20-80	0.15	1.4	0.21
80-100	0.17	1.4	0.238

On suppose qu'avant de pénétrer plus profondément, la pluie doit amener l'humidité du sol à sa capacité de rétention θ_{cr} (front d'infiltration horizontal).

- hauteur de pluie stockée dans l'horizon 0-5 cm : $(0.3 - 0.06) 5 \text{ cm} = 1.2 \text{ cm}$
- hauteur de pluie stockée dans l'horizon 5-20 cm : $(0.3 - 0.13) 15 \text{ cm} = 2.55 \text{ cm}$
- ➔ hauteur de pluie stockée dans l'horizon 0-20 cm : 3.75 cm

Le solde de la pluie $(5 - 3.75) = 1.25 \text{ cm}$ est distribué dans l'horizon suivant sur une hauteur de : $(0.3 - 0.21) \times 1.25$, soit : 13.9 cm

➔ pénétration totale de la pluie : $20 + 13.9 = 34 \text{ cm}$

Solution exercice 1_5

In the lecture:

Valeurs indicatives de S :

- Sable $0.05 \text{ m}^2/\text{g}$
- Silt $1 \text{ m}^2/\text{g}$
- Argile ➔ $800 \text{ m}^2/\text{g}$

Grain-size ranges

- Argile : $< 0.002 \text{ mm}$
- Silt (limon) : $0.002 - 0.05 \text{ mm}$
- Sable : $0.05 - 2 \text{ mm}$
- Gravier : $> 2 \text{ mm}$

For sand, take 1 mm, silt 0.01 mm and clay 0.001 mm. Take $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$, then, for each case:

Sand

$$S = \frac{3}{10^{-3} \text{ m} \times 2650 \times 10^3 \text{ g m}^{-3}} \approx 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ g}^{-1}$$

Silt

$$S = \frac{3}{10^{-5} \text{ m} \times 2650 \times 10^3 \text{ g m}^{-3}} \approx 0.11 \text{ m}^2 \text{ g}^{-1}$$

Clay

$$S = \frac{3}{10^{-6} \text{ m} \times 2650 \times 10^3 \text{ g m}^{-3}} \approx 1.1 \text{ m}^2 \text{ g}^{-1}$$

There values are all far from measured values, thus the soil cannot be well represented in this way.

Solution exercise 1_6

The formula used in the previous question is used again:

$$S = \frac{A}{M_s} = \frac{A}{V\rho_s} = \frac{2 \times 20^n + 4 \times 8^n}{9^n} \times \left(\frac{27}{20}\right)^n \times \frac{1}{\rho_s} = \frac{3^n}{\rho_s} \left[2 + 4 \left(\frac{2}{5}\right)^n \right].$$

S diverges like 3^n as $n \rightarrow \infty$. Note that, in this formula, the initial surface area is 6, and the initial volume is 1 (assume consistent units).

The task is to find n giving the indicative values of S in the previous answer. Again, take $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$; the table below gives the results, assuming an initial cube side length of 1 m:

ρ_s	2650000							
n	A	V	$A/(V\rho_s)$		Characteristic "grain size"			
0	6	1	2.26415E-06		1			
1	8	0.741	4.07547E-06		0.333333			
2	13.04	0.549	8.96604E-06		0.111111			
3	24.76	0.406	2.29857E-05		0.037037			
4	51.27	0.301	6.4262E-05		0.012346			
5	110.60	0.223	0.000187152		0.004115			
6	242.83	0.165	0.000554696		0.001372			
7	536.99	0.122	0.001655975		0.000457			
8	1190.96	0.091	0.004958188		0.000152			
9	2644.51	0.067	0.014862883		5.08E-05			
10	5874.84	0.050	0.044574629	Sand	1.69E-05			
11	13053.55	0.037	0.133707064		5.65E-06			
12	29006.44	0.027	0.401101005		1.88E-06			
13	64457.45	0.020	1.203278791	Silt	6.27E-07			
14	143237.63	0.015	3.609807304		2.09E-07			
15	318304.82	0.011	10.82938703		6.97E-08			
16	707343.14	0.008	32.48811923		2.32E-08			
17	1571872.84	0.006	97.46430745		7.74E-09			
18	3493050.04	0.005	292.3928621		2.58E-09			
19	7762332.79	0.003	877.1785139	Clay	8.6E-10			
Note that the "grain sizes" are unrealistic, so the Menger sponge is also not a good model of soil								

Solution exercise 1_7

a) Hauteur d'ascension capillaire h (Loi de Jurin) : $h = \frac{2\sigma \cos \varphi}{\rho g r}$

Valeurs de h (m)

	r (m)			
	10^{-3}	0.25×10^{-3}	0.05×10^{-3}	
Eau	1.482×10^{-2}	5.93×10^{-2}	29.1×10^{-2}	Ascension
Hg	-0.64×10^{-2}	-2.6×10^{-2}	-12.6×10^{-2}	Abaissement

b) Pression capillaire : $p_c = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r} = 592 \text{ Pa}$

L'eau est en dépression et la pression relative (par rapport à la pression atmosphérique) de l'eau sous le ménisque vaut -592 Pa .

Solution exercice 1_8

$$a = 1.05 \times 10^{-19} \text{ m}^2$$

a) *Cas du sable*

Nbre de molécules adsorbées par g de sol : $4.76 \times 10^{17} = (5 \times 10^{-2} \text{ m}^2) \times (10^4 \text{ cm}^2/\text{m}^2)/(1.05 \times 10^{-15} \text{ m}^2)$

Masse d'une molécule d'eau = $3 \times 10^{-23} \text{ g}$ (1 mole de H_2O = 6.02×10^{23} molécules = 18 g)

Masse d'eau par g de sol : $14.2 \times 10^{-6} \text{ g} = 4.76 \times 10^{17} \times 3 \times 10^{-23} \text{ g}$

$$\Rightarrow w = 1.42 \times 10^{-5} \text{ g/g}$$

b) *Cas de la montmorillonite*

Nbre de molécules adsorbées par g de sol : $762 \times 10^{19} = (800 \text{ m}^2) \times (10^4 \text{ cm}^2/\text{m}^2)/(1.05 \times 10^{-15} \text{ m}^2)$

Masse d'une molécule d'eau = $3 \times 10^{-23} \text{ g}$ (1 mole de H_2O = 6.02×10^{23} molécules = 18 g)

Masse d'eau par g de sol : $0.23 \text{ g} = 762 \times 10^{19} \times 3 \times 10^{-23} \text{ g}$

$$\Rightarrow w = 0.23 \text{ g/g}$$

On constate que la teneur en eau du sable est quasiment nulle, alors qu'elle est loin d'être négligeable dans le cas de l'argile.

Solution exercice 1_9

Pour que la plaque poreuse reste saturée, la pression capillaire doit être ≥ 15 bars, soit $15 \times 10^5 \text{ Pa}$.

$$\rightarrow p_c = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r} \quad \text{with } \cos \varphi = 1 \rightarrow r = \frac{2\sigma}{p_c} = \frac{2 \times 0.0727 \text{ N/m}}{15 \times 10^5 \text{ N/m}^2} = 0.0097 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.097 \mu\text{m}$$

$$\text{D'où } d = 2 \times 0.097 = 0.194 \mu\text{m}.$$

Note that: 1 bar = 10^5 Pa ; 1 Pa = 1 N/m^2